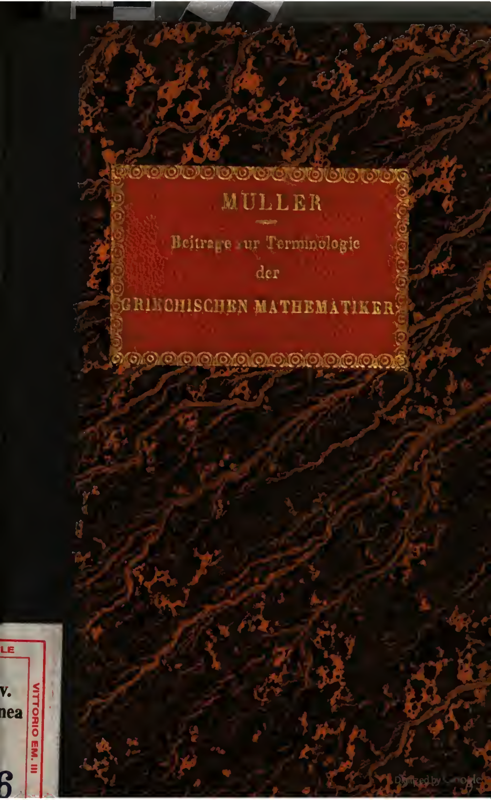

MÜLLER
Beiträge zur Terminologie
der
GRIECHISCHEN MATHEMATIKER







Beiträge zur Terminologie

der

Griechischen Mathematiker

von

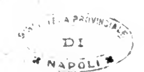
Dr. J. H. T. Müller,

Oberschulrath und Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.



Leipzig,
B. G. Teubner.
1860.





Das Studium der alten griechischen Geometer ist in der neuern Zeit bei den Mathematikern wie bei den Philologen theilweise in Abnahme gekommen. Jene haben vollauf zu thun, um mit den heutigen Fortschritten sich nur einigermassen bekannt zu erhalten, und leben sich, vielleicht ausschliesslich mit den jetzigen Hilfsmitteln ausgerüstet, nur ungern in die weit zurückliegende Behandlungsweise der Alten hinein, die ihnen ja an Stoff nichts Neues bieten können. — Diese befinden sich, was das zu bewältigende Material anbelangt, mit jenen in gleicher Lage und entschliessen sich schwer, die Grenzen ihres Forschens noch auf das Gebiet der Mathematik auszudehnen und zwar in solcher Weise, dass das einst vielleicht Erworbene hierfür in der That bisweilen nicht ausreicht.

Bis zu einem gewissen Grade sind beide, wenn sie sich diesem Studium der Alten entziehen, in ihrem Rechte, denn es ist nicht ihre Schuld, dass mittlerweile alles Frühere an Intensität zugenommen hat und dass ganz neue Gebiete des Wissens hinzugekommen sind, welche volle Berücksichtigung fordern.

Doch finden sich auch heute noch viele minder Exclusive, welche nicht gern das eine über dem andern ganz aufgeben möchten.

Als Mathematiker wünschen sie in der Geschichte ihrer Fachwissenschaft nicht Fremdlinge zu sein und dann möglichst auf die Quellen zurück zu gehen. Sie versprechen sich von diesem Quellenstudium auch einigen Gewinn für ihre Lehrthätigkeit, wenn sie sehen, wie viel die Griechen mit beschränkten Mitteln geleistet haben, welche Schärfe und Folgerichtigkeit in ihren Forschungen herrscht und wie sehr sie individualisieren, was sich zum Theil bis in deren Bezeichnungsweise hinein erstreckt, so dass ihre Kunstsprache sich zu der heutigen verhält, wie die älteren vocalreicheren Wörter zu den späteren zusammengezogenen. Manchem auch thut es wohl einmal zeitweilig von der heutigen grossen Allgemeinheit unserer Ergebnisse in jenes stille Reich des einzeln Lebendigen zurück zu kehren. Er findet vielleicht in unserer jüngsten Beschränkung des Gebrauchs der unendlichen Reihen, nur in veränderter Gestalt, den Diorismus der Alten wieder. Nur unsere Nützlichkeitsbestrebungen wird er dort vermissen, wo die Wissenschaft noch eine Art Heiligthum war.

Auch mancher Philolog wird schon beim Studium des Platon das Bedürfnis fühlen, namentlich mit der Arithmetik (nicht Logistik) der Griechen näher bekannt zu sein, weil ohne diese ihm Einzelnes unzugänglich bliebe. Nicht minderen Werth wird eine Kentnis der griechischen Mathematiker für denjenigen haben, welcher die Geschichte der alten Philosophie aus den Quellen erforschen will. Er wird für die pythagoräische Philosophie eben so wenig des *Nicomachus* (*τὰ θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς* u. *εἰςαγωγὴ ἀριθμητική*) als für die stoische und epikureische des *Cleomedes* (*Κλεομήδους κυκλικῆς θεωρίας μετεώρων βιβλία δύο*) entbehren können.

Selbst für die Sprachforschung im heutigen Sinne des Wortes dürfte das Studium der griechischen Mathematiker noch manche interessante Ausbeute gewähren. Schon der, wie es scheint, bisher wenig berücksichtigte Umstand, dass von *Archimedes*, mit Ausnahme zweier Schriften, bei denen eine Uebertragung in die gewöhnliche Sprache stattgefunden, *) alle griechisch auf uns gekommenen im dorischen Dialekte geschrieben sind, dürfte den Sprachforscher zu deren Studium auffordern. Abgesehen hiervon wird auch der Wortforscher noch vielfache Belehrung aus den für geometrische Constructionen überhaupt gebrauchten Bezeichnungen schöpfen können. Diese letzteren nämlich wurzeln so sehr in der ersten sinnlich gefassten Bedeutung, dass hierdurch Alles gleichsam eine Art Leben erhält und man den Griechen seine Figuren auf geebnetem Sande im Grossen zeichnen, oder die Spuren von horizontal bewegten Kugeln verfolgen (*ἐκβάλλω, προσεκβάλλω, παραβάλλω*), oder ihn ein Bleiloth herablassen sieht (*ἡ κάθετος*) u. s. f.

In unserer Zeit der Arbeitstheilung und der Vermittelungen würde es daher vielleicht manchem, der Ausschliesslichkeit abholden, Philologen wie Mathematiker nicht unwillkommen sein die technischen Ausdrücke, welche in den mathematischen Werken der Griechen vorkommen, nach einem wissenschaftlichen Plane geordnet und wo nöthig selbst durch Figuren erläutert, als ein Ganzes vor sich zu haben. Beide würden alsdann vielleicht geneigter sein, auf den einzelnen Schriftsteller selbst, je nach Bedürfnis, näher einzugehen. Nur dürften für das Einzelne Belegstellen mit Angabe des Autors,

*) Anm. Die Transscription hat bei dessen Schrr. über die Kreismessung und über die Kugel und den Cylinder statt gefunden, offenbar, weil diese leichter verständlich waren und deshalb schon früh mehr studiert wurden.

dem sie entnommen sind, nirgends fehlen, damit man immer wüsste, bei welchem Schriftsteller der betreffende Ausdruck vorkommt, und zugleich sähe, wie auch im Alterthum im Laufe der Zeit sich manches geändert, manche Bedeutung sich mit dem gemachten Fortschritte erweitert, manche Ausdrucksweise anderseits sich verkürzt hat. Es müsste demnach bei den Citaten eine chronologische Ordnung eingehalten und der Commentator von dem Commentierten streng geschieden werden.

Ein sorgfältiger alphabetischer Index wäre schliesslich auch für diejenigen von Werth, welche sich lediglich für das einzelne Wort interessierten, um dasselbe seines Orts zu verwenden.

Für die Arithmetik der Griechen besitzen wir seit 1842 eine sichere Grundlage in der aus tiefem Quellenstudium hervorgegangenen, ausgezeichneten kritischen Geschichte der Algebra bei den Griechen von *G. H. F. Nesselmann.* Für die Geometrie dagegen ist das reiche Material noch sehr zerstreut.

Der Verfasser nachfolgenden Bruchstücks hat beim Studium der bedeutendsten alten Mathematiker sich vor Jahren für jeden von ihm gelesenen Schriftsteller ein Verzeichnis der vorkommenden Kunstausdrücke, gleich damals nach gewissen Hauptgesichtspunkten geordnet, zu seinem eigenen Bedarf angelegt und die zugehörige Belegstelle eingetragen.

Was die Anordnung des Stoffes selbst betrifft, so würde nach seiner Ansicht die Behandlung von: *ὅρος, ὁρισμός, ἀξίωμα, κοινὴ ἔννοια, λαμβανόμενον, αἴτημα; πρότασις, θεώρημα, πρόβλημα, ἔκθεσις, κατασκευή, ἀπόδειξις, ἀπαγωγή, προσδιόρισμος, πόρισμα; ἀνάλυσις, σύνθεσις,* etc. an die Spitze des Ganzen zu stellen sein.

Mit einstweiliger Uebergehung der Arithmetik, würde der Verfasser hierauf in der Geometrie die einfachsten Verbin-

dungen der Grundgestalten, des Punctes, der Geraden, der Ebene, nach ihrer Lage und Grösse den Anfang machen lassen, woran sich dann der Reihe nach die begrenzten Gestalten, das Dreieck, Viereck, Vieleck, der Kreis, die Helix, etc. ferner das Polyeder, die Kugel, der Kegel und Cylinder mit ihren Schnitten, die Konoiden und Sphäroiden, anzuschliessen hätten.

In vorliegender kleinen Arbeit hat sich der Verfasser auf

die Behandlung der Kugel, des Kegels und Cylinders, des parabolischen und hyperbolischen Konoids und der Sphäroide, unter Einschaltung des lediglich hierfür Erforderlichen aus der Lehre von den Kegelschnitten

beschränkt, um ein kleines abgeschlossenes Ganzes zu geben.

Die in derselben vorkommenden Schriftsteller sind: *Euclides*, *Theodosius*, *Archimedes*, *Apollonius Pergaeus*, von denen folgende Ausgaben benutzt wurden:

Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιέ. ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ'. Adjecta praefatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil. Basileae apud Joh. Hervagium 1533. fol.

Εὐκλείδου στοιχεῖα. ed E. F. August. Berol. 1824. gr. 8.

Θεοδοσίου σφαιρικῶν βιβλία γ'. ed. J. Hunt. Oxoniae. 1707. 8.

Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri tres ed. E. Nizze. Berol. 1852. 8.

Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα μετὰ τῶν Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπομνημάτων. ed. J. Torelli. Oxon. 1792. Fol.

Ἀπολλωνίου Περγαίου κωνικῶν βιβλία δ'. etc. ed. Edm. Halley. Oxon. 1710. Fol.

Die Kugel.

Σφαῖρα wird, wenn es mit *σπεῖρα* verwandt ist, ursprünglich einen Knäuel aufgewickelten Garnes bezeichnen.

Euclides lässt die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen festen Durchmesser entstehen. *σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. — ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται. — κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου. — διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.* Elem. XI. Defin. 14—17.

Theodosius dagegen giebt folgende thetische Definition derselben:

σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεόν, ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προςπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. — κέντρον τῆς σφαίρας τὸ τοιοῦτο σημεῖόν ἐστιν. — ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν μένουσαν εὐθεῖαν ἡ σφαῖρα στρέφεται. *Theod.* Sph. I, Def. 1—3.

Vergleicht man *Euclid's* Definition des Kreises: *κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προςπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*, mit der der Kugel, so zeigt sich keine innere Uebereinstimmung, während die von *Theo-*

dosius gegebene der *Euclidischen* vom Kreise genau entspricht. Aus der thetischen Begriffsbestimmung geht übrigens streng genommen noch nicht das in sich zurückkehren der Grenze der Gestalt hervor, was die genetische vom Kreise sowie von der Kugel unmittelbar veranschaulicht.

Wenn *Euclides* dem Kreisumfange das Wort *περιφέρεια* ausdrücklich vindiciert, so mag diess wohl darin liegen, dass andere krummlinig begrenzte Flächen ausser dem Bereich der Elemente lagen. Die *ἐπιφάνεια* dagegen, welche die Aussenseite der Grenze eines körperlichen Raumes überhaupt bezeichnet, und unserm „Oberfläche" entspricht, wird nicht bloss für die Kugel, sondern auch für den Kegel, Cylinder, etc. gebraucht.

Gehen wir, in Beziehung auf das früher angedeutete, dem Ursprunge von *περιφέρεια* und *κέντρον* etwas weiter nach, so zeigt sich sofort, wie durch Herumführung einer gespannten Schnur, deren eines Ende an einem zugespitzten in die Erde gesteckten Stabe (*κέντρον*) befestiget ist, von deren andern Endpuncte ein Kreisbogen und nach einem vollen Umlaufe eine Kreislinie beschrieben wird. Daher bezeichnet *περιφέρεια* bei den Griechen eben so wohl jeden Bogen, als auch den ganzen Umfang eines Kreises und *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου* (*εὐθεῖα*) dessen Halbmesser, wofür sie eben so wenig wie für die Sehne (*ἡ ἐν τῷ κύκλῳ*) einen besonderen Namen haben, während *διάμετρος* die Halbierung des Kreises andeutet. — Auf die Kugel sind die obengenannten Ausdrücke bloss übertragen, weil man deren Eigenschaften offenbar später als die des Kreises untersucht hat.

Concentrische Kreise und Kugeln heissen bei *Euclides* (XI, 16. und 17.) *κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντες* und *σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὖσαι.*

Die nun folgenden Ausdrücke kommen erst in der

Sphärik des *Theodosius* vor, welche, ohne dass diess darin bestimmt ausgesprochen ist, eine wissenschaftlich geordnete Zusammenstellung der constructiven Fundamentalsätze der sphärischen Astronomie damaliger Zeit giebt.

Πόλοι τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος, δηλαδὴ τῆς διαμέτρου. I, def. 4. — Hierzu ist dessen Defin. 3. (s. o.) zu vergleichen. Pol ist hier der eine feste Punct an der hohlen Himmelskugel, um welchen als gemeinschaftlichen sphärischen Mittelpunct die Sterne Kreise beschreiben, von *πέλομαι*, wozu *πολέω* umkreisen.

Die 5. Defin., von welcher *Theodosius* in der Folge lediglich Gebrauch macht, bestimmt die Bedeutung von den Polen eines Kreises auf der Kugelfläche, d. i. von dessen sphärischen Mittelpuncten, nämlich: *κύκλου πόλος ἐν σφαίρᾳ ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ᾽ οὗ πᾶσαι προςπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

Obwohl hier dem Kugelkreise nur ein Pol beigelegt wird, welcher für einen Nebenkreis (*κύκλος μὴ ὢν διὰ τοῦ κέντρου*, oder *κύκλος μὴ μέγιστος ὤν*, oder *κύκλος ἐλάσσων τοῦ μεγίστου*) der näher liegende sein wird, so kommen doch in I, 8. und anderwärts beide Pole vor. Bekanntlich hat die Kreisfläche nur einen Mittelpunct und Halbmesser, während es für den Kreisumfang deren unendlich viele giebt, indem der Ort aller Mittelpuncte das im Hauptcentrum auf der Ebene errichtete unbegrenzte Loth ist. Deshalb braucht *Theodosius* analog der *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου*, auch *ἡ ἐκ τοῦ πόλου*. Vgl. I, 16. In I, 19. wird geradezu mit einem solchen grösseren Radius eine Kreislinie beschrieben gedacht: *εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ* A, B, *καὶ πόλῳ μὲν τῷ* A, *διαστήματι δὲ τῷ* AB, *κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ.*

Was die gegenseitige Lage zweier oder mehrerer

Kreise auf derselben Kugelfläche betrifft, so setzt *Theodosius* die Bedeutung von Parallelkreisen als bekannt voraus, wenn man nicht die Grundeigenschaft derselben: ἐν σφαίρᾳ οἱ παράλληλοι κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν (II, 1.) zugleich als deren Definition ansehen will.

Die einander berührenden Kugelkreise dagegen werden von *Theodosius* ausdrücklich definiert im Anfang des II. Buches: ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται. Der Berührungspunct heisst bei ihm ἡ συναφή.

Dass die Kugel von einer Ebene berührt wird, bezeichnet *Theodosius* durch ἅπτεσθαι und nennt den zugehörigen Berührungspunct ἡ ἁφή. — ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδου ἅπτηται μὴ τέμνοντος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον *Th.* Sph. I, 4. Aus dem Beisatze μὴ τέμνον ergiebt sich der Unterschied der Bedeutungen von ἅπτομαι und ἐφάπτομαι. Ersteres wird auch von Geraden gebraucht, welche in einem Puncte an einanderstossen, ohne über diesen hinaus verlängert zu werden: ἡ πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον ὀρθὴ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς γωνίας ποιεῖ. I, 6. — Auch bei *Archimedes* findet sich obige Nebenbestimmung zu ἅπτομαι. — αἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα *Arch.* Con. 17. — Ueber ψαύω, ἐπιψαύω für berühren, welches bei *Theodosius* nirgends, bei *Euclides* sparsam, bei *Archimedes* öfter vorkommt, und dessen Grundbedeutung streifen ist, wird anderwärts schicklicher gesprochen werden.

Wenn Kugelkreise einander schneiden, so kann diess unter einem rechten oder einem schiefen Winkel geschehen.

Im ersten Falle wird, wenn wenigstens einer derselben ein Hauptkreis ist, dieser durch die Pole des andern gehen: *ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ πρὸς ὀρθὰς* (sc. *γωνίας*) *τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων*, II, 13. — Geht ein Hauptkreis nicht durch die Pole eines andern, so liegt er schief gegen diesen und demnach auch gegen alle damit parallelen Kreise. *ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος πρός τινα κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ λοξὸς ᾖ, ἐφάψεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ προειρημένῳ*. II, 8. In der Erläuterung des Satzes heisst es *λοξὸς ἔστω, τουτέστι, μὴ ἔστω διὰ τῶν πόλων*. Vgl. noch II, 16: III, 5, 6, 7. Zu bemerken ist, dass *λοξός* nicht für das schiefliegen von Geraden, oder Ebenen im Allgemeinen gebraucht wird. Ueber das mit *luxus* verwandte *λοξός* s. *G. Curtius* Grundzüge der griech. Etymologie Th, I, nr. 540.

Von Polyedern, welche mit der Kugel in Verbindung gebracht sind, finden wir bei *Euclides* bloss die dieser eingeschriebenen, und zwar in der Bedeutung des Einzeichnens, bei der Begründung des Satzes, dass die Inhalte der Kugeln im kubischen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen, indem er vorher zeigt, wie sich der grössern von zwei concentrischen Kugeln stets ein Polyeder einschreiben lässt, welches die kleinere nicht berührt: *δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν*. XII, 17. — In XIII, 13—18. lehrt derselbe einer Kugel die fünf regulären Körper einschreiben, jedoch in der Form, dass die Kanten dieser Körper durch den gegebenen Halbmesser einer Kugel constructiv bestimmt werden, welche sich diesen Körpern umschreiben lässt, oder dieselben umfasst, z. B. *πυραμίδα συστήσασθαι ἐκ τεσσάρων*

τριγώνων ἰσοπλεύρων, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. d. h. es ist der Kugeldurchmesser dem Quadrate nach das anderthalbfache der Tetraederkante *Eucl.* Elem. XIII, 13.

Die Kugelabschnitte etc., welche ausserhalb des Bereichs der *Euclidischen* Elemente lagen, kommen erst bei *Archimedes* in seiner Schrift über Kugel und Cylinder vor, wo die Bedeutung der gebrauchten Namen als bekannt vorausgesetzt wird.

Τμῆμα τῆς σφαίρας heisst jedes der beiden Stücke, in welche die Kugel durch eine durchgelegte Ebene getheilt wird, und *ἡμισφαίριον* (auch schon von *Theodosius* II, 20, 21. gebraucht), wenn beide Abschnitte einander gleich sind. Die krumme Oberfläche des Abschnitts, nach der heutigen Benennung der zugehörige sphärische Kreis, wird *ἡ τοῦ τμήματος ἐπιφάνεια* oder schlechthin *ἐπιφάνεια* (vgl. *περιφέρεια*), die von der Kugelfläche begrenzte Ebene *ἡ βάσις*, und der Mittelpunct des sphärischen Kreises oder der Gipfel *ἡ κορυφή* genannt.

Τομεὺς τῆς σφαίρας ist, wohl zuerst bei *Archimedes*, der kleinere der beiden Kugelkegel, in welche die Kugel durch die eine Hälfte einer geraden konischen Fläche getheilt wird, wenn beider Mittelpuncte zusammenfallen. *τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. Arch.* Sph. I, def. 5.

Alle diese Ausdrücke sind Uebertragungen der älteren für den Kreis üblichen, wo sie aus der Grundbedeutung des Wortes hervorgiengen. Für den Kreis ist *τμῆμα* ein ab-

geschnittenes Stück desselben (τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. *Eucl.* III, def. 6.); τομεύς, eigentlich das was schneidet und einer geöffneten Schere gleicht, hat am Kreise seine ursprüngliche Bedeutung (τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας. (Ib. def. 10.), während sich diese am Kugelkegel nicht mehr erkennen lässt. Dieser letztere nämlich entsteht, wenn ein Kreisausschnitt um die Halbierungslinie seines Winkels als Axe einen halben Umschwung macht.

Der Kegel und der Cylinder.

Euclides beschränkt sich in den Elementen auf den geraden Kegel und Cylinder, den er daher auch schlechthin einen Kegel etc. nennt. Auch lässt er die für seine Zwecke nicht erforderliche Erweiterung der krummen Oberfläche des Kegels sowohl über den Scheitel als über die Grundfläche hinaus, unerwähnt, ohne dass man darum annehmen darf, er sei überhaupt nicht weiter gegangen, da seine Schrift über die Kegelschnitte nicht auf uns gekommen ist. Der Kegel entsteht ihm aus der Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine der Katheten als Axe. Je nachdem der der Axenkathete anliegende spitzige Winkel des Dreiecks kleiner, eben so gross, oder grösser ist, als der andere spitzige Winkel, je nach dem heisst der erzeugte Kegel spitzwinklig, rechtwinklig, oder stumpfwinklig. Von dieser Unterscheidung macht, wie wir weiter unten sehen werden, später *Archimedes* einen ausgedehnten Gebrauch.

Das griechische κῶνος (conus) ursprünglich ein Zapfen,

Kreisel, bezeichnet überhaupt etwas gleichmässig Zugespitztes. Vgl. *G. Curtius.* Grundz. d. griech. Etymol. I, nr. 84. *κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος. — ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. — βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.* *Eucl.* Elem. XI, def. 18—20.

Κύλινδρος, zunächst von *κυλίω*, ich wälze, wird von *G. Curtius* Et. I, nr. 81. auf die W. *κυρ*, *κυλ* zurückgeführt, und stimmt nur in der anfänglichen Form mit der innern Bedeutung des Wortes zusammen, indem ein schiefer Cylinder sich füglich nicht wälzen lässt. Er wird bei *Euclides* durch den Umschwung eines Rechtecks um eine seiner Seiten als Axe erzeugt.

Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. — ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. — βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι. Ib. XI, def. 21—23.

Obwohl bei dem geraden Kegel und Cylinder die Höhe der Axe gleich ist, so bedient sich doch *Euclides* in XII. 10, 11, 14, 15. des Wortes *ὕψος*. Man könnte dadurch auf die Vermuthung kommen, dass derselbe die allgemeinere Giltig-

keit der genannten Sätze bereits gekannt, aber aus andern Gründen diese nicht in die Elemente aufgenommen habe.

Archimedes beschränkt sich bei seinen weit über die *Euclidischen* hinausgehenden Untersuchungen zwar ebenfalls auf die geraden Kegel und Cylinder, deren Definition er als bekannt voraussetzt, nennt aber jenen g l e i c h s c h e n k l i g, diesen g e r a d e. Ihm also und denen, für die er schrieb, (*τοῖς δυνησομένοις, τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις*) waren die s c h i e f e n Kegel und Cylinder sicherlich bekannt; nur enthielt er sich ihrer, weil er mit jenen auch für die Kegelschnitte völlig ausreichte.

Da der gerade Kegel auch entsteht, wenn ein gleichschenkliges Dreieck (*τρίγωνον ἰσοσκελές*, von *τὸ σκέλος* der Schenkel) um die Halbierungslinie seines Winkels an der Spitze als Axe einen halben Umschwung macht, so ist die Bedeutung von *κῶνος ἰσοσκελής* wiederum eine bloss übertragene. In dem Beweise zu Sph. I, 11 sagt er: *διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον.* Eb. nennt er den Kegel einen g e r a d e n, (dessen Axe senkrecht auf der Grundfläche steht): *ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀ ρ θ ο ῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν* (Berührungspunct) *τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.* Die von der Spitze des Kegels nach irgend einem Puncte des Umfangs der Grundfläche gezogene Strecke d. i. die Seitenkante des Kegels heisst bei *Archimedes* *ἡ π λ ε υ ρ ὰ τ ο ῦ κ ώ ν ο υ.* *Arch.* Sph. I, 9.

Wird der Grundfläche des Kegels ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben und die Spitze desselben mit allen Ecken des Vielecks verbunden, so heisst diess bei *Archimedes* *πυραμίδα εἰς τὸν κῶνον ἐ γ γ ρ ά φ ε ι ν*, und *πυραμίδα περὶ τὸν κῶνον π ε ρ ι γ ρ ά φ ε ι ν.* *Euclides* beschränkt den Gebrauch dieser Ausdrücke mehr auf den Kreis, errichtet auf der Grundfläche des diesem ein- oder umgeschriebenen

Vielecks diejenige Pyramide, welche ihre Spitze in der des Kegels hat: *ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κύκλον τὸ τετράγωνον, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς κ. τ. λ.* *Eucl.* El. XII, 12. Vgl. jedoch XII, 11, wo nach ausgeführter Construction *ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἡμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσας* vorkommt.

In gleicher Weise kommt in Bezug auf den Cylinder *ὁ ὀρθὸς κύλινδρος* Sph. I, 12; *ἡ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου* als dessen Seitenkante Sph. I, 14, *πρίσμα εἰς τὸν κύλινδρον ἐγγράφειν, πρίσμα περὶ τὸν κύλινδρον περιγράφειν* Sph. I, 13 bei *Archimedes* vor, bei *Euclides* nicht.

Unter *κωνικὴ ἐπιφάνεια* und *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* versteht *Archimedes* bloss die krumme Oberfläche des Kegels und Cylinders, während er bei der Pyramide und dem Prisma, um die Summe aller Seitenflächen zu bezeichnen, von der *ἐπιφάνεια* die eine oder beide Grundflächen ausdrücklich ausschliesst: *ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην.* *Arch.* Sph. I, 8. Ebenso I, 9. u. a.

Wie *περιφέρεια* nicht bloss den Kreisumfang, sondern auch den Kreisbogen bezeichnet, so verhält es sich bei *Archimedes* auch mit der *ἐπιφάνεια* am Kegel und Cylinder. Zieht man aus den Endpunkten einer Sehne $B\Gamma$ der Kegelgrundfläche nach der Spitze A des Kegels die Seitenkanten BA, ΓA, so heisst das kleinere der beiden dadurch erhaltenen Stücke der Kegelfläche auch *ἐπιφάνεια*, welches *Archimedes* dann mit der Dreiecksfläche $AB\Gamma$ vergleicht: *λέγω ὅτι*

τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς τῆς μεταξὺ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Sph. I, 10. und für den Cylinder: *ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.* Sph. I, 11.

Während wir uns über dem Kreise einen Kegel oder Cylinder construiert denken, drücken diess die Griechen durch *ἀπό* aus, eben so wie die Construction von Pyramiden und Prismen über einem Vielecke. *ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ. Arch.* Sph. I, 20. *ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΔΡ. Arch.* Con. 10. — *πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς. Eucl.* XI, def. 12. — In der Ebene heisst das Quadrat über einer Strecke *ΑΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον.* — *ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. Eucl.* I, 47. — In der Regel wird aber *τετράγωνον* weggelassen, so dass *τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ* das Quadrat über *ΑΒ* bezeichnet. Derselbe Satz lautet bei *Theodosius* auf das bei *K* rechtwinklige Dreieck *ΒΚΗ* angewendet: *τῷ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΒ. Theod.* Sph. II, 11. Diess ist dann auch auf die Zahlen übergegangen, so dass *τὸ ἀπὸ τοῦ γ'* neun bedeutet. Das Rechteck aber aus zwei Strecken *ΑΒ, ΒΓ* wird durch *ὑπό* ausgedrückt: *τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον. Eucl.* II, 1., was später bloss mit *τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ* bezeichnet und in dieser Form ebenfalls auf die Zahlen übertragen wurde, so dass *τὸ ὑπὸ τῶν γ', δ'* zwölf bedeutet.

Für den Kegelstumpf findet sich ungeachtet der häufigen Anwendung desselben bei *Archimedes* kein eigenthümlicher Name.

Nachdem er in Sph. I, 16. gezeigt, dass der Mantel jedes geraden Kegels sich zur Grundfläche verhält, wie die Kante des Kegels zum Radius der Grundfläche, bestimmt er in I, 17. den des Stumpfes: *ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς τμηθῇ ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἴσος ἐστὶ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.*

Wird einem Kreise ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben, dessen Seitenzahl durch 4 theilbar ist (*τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος*) und macht das Ganze um eine Hauptdiagonale, die also zugleich durch den Kreismittelpunct geht, einen halben Umschwung, so entsteht eine Kugel und ein dieser ein- oder umgeschriebener Körper, welcher von zwei Kegelflächen und dazwischen von lauter Kegelstumpfflächen begrenzt ist, deren Ergänzungsspitze auf die Drehungsaxe fallen würde. Von zwei der Axe nicht anliegenden entsprechenden Seiten des Vielecks sagt er: *αἱ δὲ (πλευραὶ) κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι ἀλλήλαις τε καὶ τῷ ἄξονι.* *Arch.* Sph. I, 24. Von dem entstandenen Körper sagt er: *ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγεγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*

Während der Kegelstumpf eines eigenen Namens ent-

behrt, findet sich bei *Archimedes* ein solcher für den ihm dualen geraden **Doppelkegel**: *ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. Arch.* Sph. I, def. 6. — *Rhombus* definiert *Euclides* I, def. 32: *τῶν τετραπλεύρων σχημάτων ῥόμβος ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.* Obiger Körper könnte daraus entstanden sein, dass ein ebenes gleichseitiges Viereck um eine seiner Diagonalen als Axe einen halben Umschwung macht. Von *Archimedes* wäre dann das erzeugende Viereck zu einem Drachen erweitert worden. Da aber das Wort von *ῥέμβω*, **sich drehen**, abstammt und *ῥόμβος* auch einen **Kreisel** bedeutet, so liegt die Vermuthung nicht weit, dass *ῥόμβος στερεός* **ohne** das Adjectivum unter jener Beschränkung das ältere Wort, und *ῥόμβος* als Parallelogramm nur den **Axenschnitt** des Körpers bezeichne. Man wird hierin durch die Erwägung bestärkt, dass *Archimedes* für den bei ihm seltener vorkommenden Doppelkegel nur das ursprüngliche Wort wieder aufnahm, ohne für den so oft gebrauchten Kegelstumpf ein neues, wie etwa *ἀπότμημα κώνου*, einzuführen. Diess erklärt sich übrigens noch aus dem Umstande, dass bei ihm letzterer Ausdruck eine andere Bedeutung erhalten hat. Wird nämlich ein gerader Kegel von einer der Grundfläche nicht parallelen Ebene geschnitten, welche allen Kanten des Kegels begegnet und mit der Grundfläche auf einerlei Seite des Scheitels liegt, so nennt *Archimedes* das Stück des Kegels vom Scheitel bis zur durchgelegten Ebene einen **Kegelabschnitt**: *αἴκα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά*, (eine Ellipse).. *αἴκα*

δὲ ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δὲ ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς· κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά· ἄξων δὲ ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. *Arch.* Con. Einleit.

Anders lautet die Bezeichnung für das Stück eines geraden cylindrischen Raumes, welches zwischen zwei allen Kanten begegnenden parallelen Ebenen liegt, welche die cylindrische Fläche in zwei congruenten Ellipsen schneiden: αἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμαθῇ συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαί, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις.. εἰ δὲ αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσεις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν· ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. Eb. — In unserer Sprache würden wir τόμος κυλίνδρου eine Cylinderschicht nennen.

Wenn *Archimedes* in den auf uns gekommenen Werken sich auf den geraden Kegel und Cylinder beschränkt hatte, leitete *Apollonius Pergäus* die Eigenschaften der Kegelschnitte aus der beliebigen konischen Fläche ab, deren Richtlinie ein Kreisumfang ist. Er lässt die konische Fläche entstehen, indem eine unbegrenzte Gerade sich längs dem Umfange eines festen Kreises fortbewegt, während sie zugleich durch einen festen Punct geht, welcher ausserhalb der Ebene jenes Kreises liegt; nennt jedoch das Ganze eine konische Fläche, welche aus

zwei auf entgegengesetzten Seiten des festen Puncts liegenden Flächen besteht. Deshalb heisst dieser Punct bei ihm auch *κορυφή*. Für die schiefe konische Fläche, als beiderseits unbegrenzt gedacht, hat er keinen besondern Namen, während er den vollbegrenzten Kegel, nach dem sogenannten Axendreiecke, einen ungleichseitigen (*σκαληνός*) nennt und diesen Namen später auf die unbegrenzte Fläche überträgt. Er giebt in den *ὅροις πρώτοις* zum ersten B. seiner Kegelschnitte ff. Bestimmungen: *ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὅς οὐκ ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προςεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφθεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἡ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, — κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον, — ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου ἀγομένην εὐθεῖαν. — κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, — κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή, — ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν, — βάσιν δὲ τὸν κύκλον.*

Für unser „Richtkreis der konischen Fläche" findet sich kein eigenes Wort. *Apollonius* hilft sich mit der Basis des zugehörigen Kegels und unterscheidet daher bloss zwischen geraden und schiefen Kegeln, deren krumme Flächen man sich dann erweitert zu denken hat:

ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς

βάσεσι τοὺς ἄξονας, — *σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας*.

Die die konische Fläche erzeugende Gerade heisst bei ihm *ἡ γράφουσα ἐπιφάνειαν εὐθεῖα*. I, 4; I, 14.

Wird durch das Axendreieck (*τὸ ἄξονος τρίγωνον*) eines schiefen Kegels, d. h. durch diejenige vom Kegel begrenzte Ebene, die durch die Axe geht und senkrecht auf der Grundfläche steht, eine zweite auf jenem Dreiecke senkrechte Ebene so gelegt, dass sie jener Grundfläche antiparallel ist: so schneidet sie bekanntlich die konische Fläche ebenfalls in einer Kreislinie. Diesen Schnitt nennt *Apollonius* den Gegenschnitt: *ἐὰν κῶνος σκαληνὸς τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον· ἡ τομὴ κύκλος ἐστίν. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία*. *Ap*. I, 5.

Jede schiefe konische Fläche hat demnach, was *Apollonius* nicht weiter berücksichtiget, weil es von seiner eigentlichen Aufgabe abliegt, zwei Richtkreise und zwei verschiedene Axen, weshalb man die geraden und schiefen konischen Flächen auch ein- und zweiaxige nennen könnte, ohne diess zugleich auf die Kegel anwenden zu dürfen.

Da wir uns diessmal auf die körperlichen krummflächigen Gestalten beschränken wollen und im Alterthum nur bei *Archimedes* weiter gehende Untersuchungen hierüber angetroffen werden, so müssen wir jetzt zu diesem zurückkehren. Die von ihm betrachteten Körper aber sind durch den Umschwung der Kegelschnitte um eine der Axen erzeugt. Es wäre demnach naturgemäss, die Terminologie der Kegelschnitte vorauszuschicken. Allein die Schrift von *Archimedes* über die Elemente der Kegelschnitte, auf welche er selbst in der Abhandlung

von den Konoiden und Sphäroiden verweist, (*δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Κωνικοῖς. Arch.* Con. 4.), sowie in seiner Quadratur der Parabel, 3. Satz (*ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς Κωνικοῖς Στοιχείοις*) ist verloren gegangen, so dass wir nur seine Quadratur der Parabel und dasjenige benutzen können, was sich gelegentlich in den eben genannten Schriften vorfindet. Das Werk des *Apollonius* aber, welches dieselben ausschliesslich behandelt und von den Flächen zweiten Grades ganz absieht, ist späteren Ursprungs als die *Archimedischen* Arbeiten, so dass des ersteren Lehrsätze und Bezeichnungen theilweise auf die Konoiden etc. keine Anwendung finden. Auch würde eine Zusammenstellung aller vorhandenen von den Griechen bereits gefundenen Beziehungen hier, selbst abgesehen von den kaum zu entbehrenden Figuren, zu viel Raum in Anspruch nehmen, wenn sie verständlich werden sollte. Ausserdem wird auch dann noch immer eine Lücke bleiben, weil nur die vier ersten Bücher des *Apollonischen* Werkes in griechischer Sprache auf uns gekommen sind.

Es bleibt daher jetzt nur übrig, lediglich aus den archimedischen Schriften das für unsern Zweck Erforderliche über die Kegelschnitte vorauszuschicken.

Archimedes verwendet zur Hervorbringung aller Kegelschnitte ausschliesslich die geraden oder gleichschenkligen Kegel, welche man sich je nach Bedarf über die Grundfläche und auch rückwärts über den Scheitel hinaus unbegrenzt erweitert (*αὐξάνω*) zu denken hat. Für die Benennung der Kegelschnitte nun ist bei ihm bleibende Bedingung, dass durch irgend einen von der *κορυφή* verschiedenen Punct der konischen Fläche eine unbegrenzte Ebene gelegt werde, welche auf der durch diesen Punct und durch den Scheitel gezogenen Geraden (*κώνου πλευρά*) senkrecht steht.

Ist dann der ursprüngliche Kegel spitzwinklig, so durchschneidet die durchgelegte Ebene alle Kanten, so dass die Durchschnittslinie der Ebene mit der konischen Fläche in sich selbst zurückkehrt und auf einerlei Seite des Kegelscheitels liegt. Dieser Schnitt heisst bei ihm ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομή. Es ändert sich daher nur gleichzeitig mit dem spitzigen Winkel des Kegels die Gestalt dieses Schnittes. Der erst von *Apollonius* eingeführte Name ἔλλειψις kommt zwar in jenes Schrift von den Konoiden zwei bis dreimal vor; allein *E. Nizze* weist in den kritischen Anmerkungen zu seiner Uebersetzung des *Archimedes* nach, dass dieser Name wohl nur durch einen späteren sachverständigen Abschreiber hineingekommen sei. Eines andern Namens für Ellipse, dessen Ursprung wahrscheinlich in θύραι (nach *Aristoteles*: gewisse Muschelschalen) zu suchen ist, gedenkt *Pappus* in seiner Einleitung zum ersten Buche der Conica des *Apollonius*: ἔλλειψις, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσιν.

Ist aber der ursprüngliche Kegel rechtwinklig, so wird stets eine Kante der konischen Fläche mit der durchgelegten Ebene parallel, während diese allen übrigen Kanten und zwar auf einerlei Seite des Scheitels begegnen muss. Dieser Schnitt heisst dort ἡ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομή. Den Namen παραβολή hat diese Curve erst von *Apollonius* erhalten. Da es nur eine rechtwinklige konische Fläche giebt, so müssen alle Parabeln einander ähnlich sein.

Ist endlich der ursprüngliche Kegel ein stumpfwinkliger, so muss es beiderseits derjenigen Kante, worauf die Ebene senkrecht steht, je eine Kante geben, welche dieser Ebene parallel ist, während von den jenseits liegenden die Rückverlängerung einer jeden die Ebene wieder treffen wird. Dieser Schnitt heisst ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή. Dessen Gestalt ändert sich gleichzeitig mit dem

stumpfen Winkel des Kegels. Die beiden Aeste dieser Curve, welche je einem Stücke der konischen Fläche angehören, werden von *Archimedes* und auch noch von *Apollonius*, als zwei Curven angesehen, die einem und demselben Schnitte angehören. Diesen Schnitt nennt *Apollonius* *ὑπερβολή*.

Die archimedische Benennung der drei Curven ist zwar weitläuftig, aber, unter der einmal gemachten Voraussetzung, folgerichtig; sie hat den Vortheil, uns gleich mit dem Namen die Entstehung sowie die Gestalt des Schnitts zu vergegenwärtigen. Die des *Apollonius* beruht auf der Beschaffenheit der Scheitelgleichungen der drei Curven, die in der heutigen Zeichensprache durch

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$$
$$y^2 = px$$
$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$$

ausgedrückt werden. Im Schnitte des rechtwinkligen Kegels lässt sich das Quadrat der Ordinate mit dem Rechtecke aus dem Parameter in die Abscisse unmittelbar vergleichen (*παραβάλλειν*); in dem des stumpfwinkligen Kegels geht jenes Quadrat über dieses Rechteck hinaus (*ὑπερβάλλειν*); in dem des spitzwinkligen Kegels ist jenes Quadrat unter diesem Rechtecke, so dass ein darin zurückbleiben (*ἔλλειψις* von *ἐν* und *λείπω*) eintritt. Hier erscheint *ἔλλειψις* wenigstens in der Form nicht übereinstimmend mit *παραβολή* und *ὑπερβολή*.

Pappus sagt in seinen Bemerkungen zur Einleitung von *Apollon.* Con. I: *ἀλλ᾽ ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν· ὅτι οἱ παλαιοὶ κῶνον ὁριζόμενοι* (*ὅρος* d. Definition) *τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν*

ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν ἔλλειψιν· καὶ ἔστιν παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας τὰς τομάς.

Beiläufig bemerkt, kann man sich, die archimedische Entstehungsweise der Kegelschnitte festhaltend, successiv alle Gestalten derselben hervorbringen, wenn man die Bewegung zu Hilfe nimmt. Wird im Mittelpuncte o eines festen Kreises auf dessen Ebene ein unbegrenztes Loth op errichtet und bewegt sich p als Mittelpunct der geraden konischen Fläche, welche jenen Kreis zum unveränderlichen Richtkreise hat auf op von o aus stetig fort, so entstehen alle erdenklichen konischen Flächen, deren obere Grenze die cylindrische Fläche ist, so dass von o an abnehmend alle stumpfwinkligen, die rechtwinklige, alle spitzwinkligen konischen Flächen hervorgebracht werden. Im Umfange des Richtkreises nehme man ferner irgend einen festen Punct a an, so ist die durch a und p gehende Gerade eine Kante der jedesmaligen konischen Fläche. Wird nun die Schnittebene durch den festen Punct a so gelegt, dass sie der Grundbedingung gemäss stets auf ap senkrecht steht, so ändert sich mit p auch die Lage dieser Ebene stetig und schneidet, wenn wir mit der oberen Grenze beginnen, die cylindrische Fläche in einem Kreise, dem Richtkreise selbst; bewegt sich p nach o hin, so entstehen alle Ellipsen mit immer mehr von einander verschiedenen Axen, bis $po = oa$ wird, d. h. bis der Schnitt in eine Parabel übergeht; bewegt sich p noch weiter nach o hin, so werden alle möglichen Hyperbeln erzeugt.

Nach dieser kleinen Abschweifung, welche zeigen mag, wie weit man auch mit den archimedischen Mitteln kommen kann, kehren wir wieder zu unserm Geometer selbst zurück.

Die von *Archimedes* für die drei Kegelschnitte gebrauchten Namen: ἡ τοῦ ὀξυγωνίου, τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή könnte zu dem Glauben verleiten, es

sei ihm unbekannt gewesen, dass sich aus irgend einer geraden konischen Fläche alle drei Curvenarten ableiten lassen. Diess ist keineswegs der Fall. Wird z. B. eine nicht spitzwinklige konische, oder eine cylindrische Fläche von einer Ebene so geschnitten, dass diese allen Kanten von jener begegnet, ohne dem Richtkreise parallel zu sein, so weist er nur nach, dass es eine spitzwinklige konische Fläche geben muss, welche durch jene Curve geht und mit einer ihrer Kanten auf der Schnittebene senkrecht steht, d. h. dass die auf jene Weise hergestellte Linie eine *ὀξυγωνίου κώνου τομή* ist. Man vergleiche hierzu dessen oben mitgetheilte Definitionen von *ἀπότμαμα κώνου* und *τόμος κυλίνδρου*.

Gehen wir jetzt zu den einzelnen Kegelschnitten über, so ist zu beachten, dass wir von *Archimedes* eine eigene Abhandlung über die Quadratur (*τετραγωνισμός*) der Parabel besitzen, welche ihren natürlichen Platz zwischen dessen erstem und zweitem Buche vom Gleichgewichte der Ebenen einnimmt. In derselben bestimmt er sowohl mit Hilfe der vorausgegangenen Gleichgewichtssätze, als auch, hiervon unabhängig, in rein geometrischer Weise den Flächeninhalt eines parabolischen Abschnitts. In dem nachfolgenden zweiten Buche vom Gleichgewichte wird von ihm noch der Schwerpunct eines parabolischen Abschnitts gefunden.

Ueber die Ellipse und Hyperbel dagegen haben wir, weil dessen Elemente der Kegelschnitte verloren gegangen sind, bloss das hiervon in seinem Werke über die Konoiden und Sphäroiden sich beiläufig oder vielmehr grundlegend Vorfindende.

Die Axe der Parabel nennt *Archimedes*, da *ἄξων* schon für die zugehörige konische Fläche verwendet ist, *διάμετρος*; dagegen wird jeder andere Parabeldurch-

messer *ἁ παρὰ τὰν διάμετρον*, d. i. die der Axe parallele Gerade, genannt. Auch heisst ihm die Axe selbst bisweilen *ἁ ἀρχὰ διάμετρος*.

Die Berührende an einem Punct B der Parabel heisst *ἡ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ B*.

Wird eine beliebige Sehne, in der Parabel und diejenige Berührende an die Curve gezogen, welche dieser Sehne parallel ist, so heisst die von der Parabel und der Sehne begrenzte Ebene ein parabolischer Abschnitt, welcher die Sehne zur Grundlinie, jenen Berührungspunct zum Scheitel, den Abstand des Scheitels von der Grundlinie zur Höhe und das von der Sehne begrenzte Stück des zum Scheitel gehörigen Durchmessers zum Durchmesser hat: *τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν· ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν καθετὸν ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος· κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα καθετὸς ἄγεται. Arch.* Parab. 17. Hierzu sowie zum Vorhergehenden vergleiche: *αἴκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ᾖ δὲ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΔΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Β· ἐσσοῦνται αἱ ΑΔ,ΔΓ ἴσαι.* Ib. 1.

Dadurch, dass er einem parabolischen Abschnitte das grösste Dreieck (*τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ*), den zwei übrig bleibenden Abschnitten wiederum die grössten Dreiecke einschreibt und nachweist, dass jedes der beiden letzteren dem achten Theile des ursprünglichen gleich ist, gelangt er durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu dem Satze, dass jeder parabolische Abschnitt dem $\frac{4}{3}$fachen des grössten ihm eingeschriebenen

Dreiecks gleicht: *πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ αὐτὰν τὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.* *Arch.* Parab. 24.

Nachdem *Archimedes* im zweiten Buche der Lehre vom Gleichgewicht der Ebenen gezeigt hat, dass der Schwerpunct jedes Parabelabschnitts auf dessen Durchmesser liegt und diesen so theilt, dass das am Scheitel liegende Stück $\frac{3}{2}$mal so gross ist als das an der Grundlinie liegende (*παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἁμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος τοῦ ποτὶ τὰν βάσιν.* Aequip. II, 8.): so geht er zur Untersuchung des zwischen zwei parallelen Sehnen liegenden parabolischen Streifens (*τόμος*) über, wovon die Sehnen die Grundlinien (*βάσεις*) bilden, während die Verbindungsstrecke ihrer Halbierungspuncte der Durchmesser des Streifens (*διάμετρος τοῦ τόμου*) heisst. S. Aequip. II, 10. Vgl. den entsprechenden Ausdruck *τόμος κυλίνδρου.*

Archimedes beruft sich ferner beim Beweise des Satzes, dass Abschnitte einer und derselben Parabel flächengleich sind, wenn diese Abschnitte gleiche Durchmesser haben, auf folgenden in den (verloren gegangenen) Elementen der Kegelschnitte dargethanen Lehrsatz: das Quadrat der Ordinate ist für jeden Durchmesser gleich dem Rechtecke aus dem Parameter dieses Durchmessers in die zugehörige Abscisse, wobei er ebenfalls als bekannt voraussetzt, dass der Ort der Mittelpuncte aller parallelen Sehnen der zu diesem Sehnensysteme gehörige Durchmesser ist. — Da die Parabel aus dem rechtwinkligen Kegel geschnitten ist, so wird Alles auf diesen Kegel bezogen und es ist der Parameter jedes Parabeldurchmessers doppelt

so gross, als der Abstand des Kegelscheitels von diesem Durchmesser. Ist AE eine Parabelsehne, Z deren Halbierungspunct, $\varDelta Z$ das zugehörige Durchmesserstück, N der Parameter dieses Durchmessers, so ist AZ eine Ordinate, $\varDelta Z$ die zugehörige Abscisse und demnach das Quadrat über AZ gleich dem Rechteck aus N in $\varDelta Z$. Diess wird so ausgedrückt: δ ύ ν α τ α ι ἁ AZ ἴ σ ο ν τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς N καὶ τᾶς $\varDelta Z$, wo man sich vor ἴσον etwa χωρίον, einen bestimmten Flächenraum, zu denken hat. *Arch.* Con. 5. — Ueber den Zusammenhang dieser Bedeutung von δύναμαι mit der gewöhnlichen habe ich nirgends genügende Auskunft finden können. Auch δ ύ ν α μ ι ς kommt als Bezeichnung des Q u a d r a t s sowohl einer Strecke als einer Zahl vor, (εὐθεῖαι δ υ ν ά μ ε ι σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τ ε τ ρ ά γ ω ν α τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται. *Eucl.* Elem. X. def. 3.). Das früheste Vorkommen dieser Bedeutung von δύναμαι dürfte wohl im Theätet des P l a t o 147 zu finden sein, wo dieselbe ohne weitere Erläuterung, also als durchaus bekannt, angewendet wird. Vielleicht ist die Grundbedeutung von δύναμαι eine früh erloschene. Eine, nicht besonders glückliche, Uebersetzung von δύναμις in der obigen Bedeutung durch potentia hat uns den heutigen arithmetischen Ausdruck „Potenz" zugeführt, während ich, bis jetzt wenigstens, δύναμις nirgends, selbst nur für den Kubus angewendet, angetroffen habe.

Was die E l l i p s e betrifft, so bezeichnet *Archimedes* unter Vermeidung des Ausdrucks ἄξων deren H a u p t - und N e b e n a x e beziehungsweise mit ἁ μ ε ί ζ ω ν und ἁ ἐ λ ά σ σ ω ν δ ι ά μ ε τ ρ ο ς. Die zweite Axe heisst schon die der ersten z u g e o r d n e t e, bezeichnender conjugata: ἁ δὲ N εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἅ

ἐστι συζυγὴς τᾷ *AB*. *Arch.* Con. 9. — Der Mittelpunct der Ellipse heisst, wie beim Kreise, τὸ κέντρον.

Vom fünften bis zehnten Satze der Konoiden beweist *Archimedes* eine Reihe von Eigenschaften der Ellipse, die wahrscheinlich ebenfalls von ihm später gefunden sind und wohl auch nicht in den mehrerwähnten Elementen der Kegelschnitte gestanden haben, weil er sonst auf diese, wie anderwärts, verwiesen hätte. Auch nennt er im eilften Satze mehreres vor ihm Gefundenes, ohne hiervon den Beweis zu geben.

Als bekannt voraussetzend, dass in der Ellipse für die beiden Axen sich die Quadrate der Ordinaten wie die Rechtecke aus den zugehörigen Abschnitten verhalten, führt er die Quadratur der Ellipse auf die Quadratur des Kreises zurück und zeigt, dass sich der Inhalt (τὸ χωρίον) der Ellipse zu dem über deren Hauptaxe beschriebenen Kreise wie die Hauptaxe zur Nebenaxe verhält: *πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.* *Arch.* Con. 5. Hieraus wird gefolgert, dass zwei beliebige Ellipsen sich ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die Rechtecke aus ihren Axen: *τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν ποτ᾽ ἄλλαλα.* Ib. 7.

In den auf diese folgenden Sätzen zeigt *Archimedes*, wie sich zu einer gegebenen Ellipse spitzwinklige Kegelflächen finden lassen, wenn der zugehörige Scheitel in einer der beiden Ebenen liegt, die auf der Ellipsenebene senkrecht steht und durch eine der beiden Ellipsenaxen gelegt ist. In

ähnlicher Weise werden gerade Cylinderflächen bestimmt, welche durch eine gegebene Ellipse gehen.

Das in der Schrift über die Konoiden von der Hyperbel und deren Asymptoten Vorkommende wird schicklicher in der folgenden Abtheilung Platz finden, weil es mit dem dortigen auf das engste verbunden ist.

Die Konoide und Sphäroide.

In dem schon mehr erwähnten Werke *περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* untersucht *Archimedes* die Eigenschaften derjenigen Körper, welche entstehen, wenn eine Parabel oder Hyperbel um ihren Hauptdurchmesser, oder wenn eine Ellipse um ihren grössten, wie um ihren kleinsten Durchmesser als Axe einen halben Umschwung macht.

Durch die beiden erstgenannten Kegelschnitte entstehen Körper, welche das Ansehen (*τὸ εἶδος*) für die erzeugende Parabel eines Kegels und für die erzeugenden Hyperbeläste zweier Kegel haben; während die durch den Umschwung einer Ellipse entweder um deren grössten oder kleinsten Durchmesser hervorgebrachten Gestalten das Ansehen einer Kugel haben. — In den entstandenen Körpern erhält derjenige Durchmesser, um welchen der Kegelschnitt sich gedreht, naturgemäss wieder den Namen Axe, deren Grenzpuncte die Scheitel des Körpers heissen.

Weil bei *Archimedes* die Parabel der Schnitt des rechtwinkligen Kegels genannt wird, so bezeichnet er den kegelförmigen Körper, welchen diese erzeugt, kurz und folgerichtig mit rechtwinklig, und den aus der Hyperbel hervorgebrachten mit stumpfwinklig. — Die mittelst der Ellipse erzeugten kugelförmigen Körper aber heissen ihm ablange oder abgeplattete, je nachdem der Umschwung um den

längsten oder den kürzesten Durchmesser statt gefunden. Jede durch den Mittelpunct der Drehungsaxe gehende Gerade, welche auf dieser senkrecht steht und von der krummen Fläche begrenzt wird, heisst ihm der Durchmesser der Gestalt. *Αἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομά, μενούσας τᾶς διαμέτρου, περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι· — καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον καλεῖσθαι· — κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. Arch.* Con. Einleit.

Wenn *Archimedes* eine Hyperbel um ihren festen Hauptdurchmesser sich schwingen lässt, um den zugehörigen kegelförmigen Körper zu erzeugen, so lässt er gleichzeitig deren Asymptoten (Berührungslinien an die beiden unendlich entfernten Puncte der Curve) an der Bewegung Theil nehmen, wodurch eine konische Fläche entsteht, die ihren Scheitel im Mittelpuncte des Konoids hat. Für diese Asymptoten braucht *Archimedes* den charakteristischen Ausdruck: die sich der Curve am engsten Anschliessenden (*αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς*). Diese Bezeichnung ist sachgemässer als die später von *Apollonius* eingeführte *αἱ ἀσύμπτωτοι* (die mit der Curve nicht zusammenfallenden, d. h. die ihr nicht begegnenden Geraden), deren es, selbst wenn sie durch den Mittelpunct gehen, der Wortbedeutung nach unzählige giebt. Letzterer Ausdruck erscheint allein gerechtfertiget, sobald man sich zu der gegebenen Hyperbel die ihr conjugierte hinzudenkt, wo es dann in der That nur zwei jenen beiden Curven nicht begegnende Gerade giebt.

Auch *Theodosius* hat in seiner Sphärik *ἡμικύκλια ἀσύμπτωτα* auf einer und derselben Kugelfläche, welche in ihrer Bedeutung nicht entfernt zu der von Asymptoten der Hy-

perbel stimmen, da bekanntlich alle verschiedenen Hauptbalbkreise einer Kugel genug verlängert einander sogar in zwei Puncten begegnen.

Abweichend erscheint bei *Archimedes* die Bezeichnung des Hauptdurchmessers einer Hyperbel. Wenn wir auf einer unbegrenzten Geraden 𝔵𝔞𝔟𝔶 zwei bestimmte Puncte 𝔞 und 𝔟 annehmen, und dann die beiderseits begrenzte Gerade 𝔞𝔟 die Innenstrecke, den Inbegriff der beiden Stralen 𝔞𝔵 und 𝔟𝔶 aber die zugehörige Aussenstrecke nennen, so ist bei der über 𝔞𝔟 construierten Ellipse die Innenaxe zugleich Innenstrecke, bei der zugehörigen Hyperbel dagegen ist die Inneuaxe die Aussenstrecke 𝔞𝔵, 𝔟𝔶 und die Ausseuaxe die Innenstrecke 𝔞𝔟, welche gewöhnlich schlechthin die Hauptaxe der Hyperbel genannt wird. Die Innenaxe der Hyperbel nun nennt *Archimedes* deren Hauptdurchmesser, die Hälfte unserer Aussenaxe der Curve aber die an seinem Hauptdurchmesser daran seiende Gerade (*ἡ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι* von *πρός* und *εἰμί*).

Die von *Archimedes* gegebene Definition eines hyperbolischen Konoids lautet: *αἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἐῶντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἁ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς· μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ ἐπιλαψοῦνται, οὗ κορυφὰ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι· — ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῦσα διάμετρος. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, — ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον· — κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. — τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν*

ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς *περιέχοντα* τὸ *κωνοειδὲς* καλεῖσθαι· — τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς *ποτεοῦσαν* τῷ *ἄξονι* καλεῖσθαι.

Ueber die Sphäroide endlich setzt *Archimedes* folgendes fest: αἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομά, μενούσας τᾶς *μείζονος* διαμέτρου, περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς *παράμακες σφαιροειδὲς* καλεῖσθαι. — εἰ δὲ τᾶς *ἐλάσσονος* διαμέτρου μενούσας, περιενεχθεῖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς *ἐπίπλατυ σφαιροειδὲς* καλεῖσθαι. (Zu ἐπίπλατυ vergl. *Lobeck* z. Phryn. p. 539.) — ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων *ἄξονα* μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. — *κορυφὰν* δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος· — καὶ *διάμετρον* τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. Ib.

Während dem Sphäroid ausdrücklich ein κέντρον beigelegt wird, scheint diess bei dem hyperbolischen Konoid, eben so wie bei der Hyperbel, nicht statt gefunden zu haben, was auch der Gebrauch von der ποτεοῦσα τῷ ἄξονι, dem Axenansatze, vermuthen lässt.

Wenn *J. Chr. Sturm* in seiner deutschen Uebersetzung des *Archimedes* (Nürnberg, 1510. fol.) das griechische κωνοειδές und σφαιροειδές sinnig und sprachrichtig durch Afterkegel und Afterkugel wiedergegeben hat, wie wir noch heute Afterweisheit, Aberwitz und Aberglaube in unserer Sprache haben, so sind beide Worte bei uns nicht aufgekommen, vielleicht schon weil sie deutsch waren. *E.*

Nizze behält, gleich früheren und noch vielen heutigen Mathematikern, in seiner vortrefflichen Uebersetzung des *Archimedes* Stralsund 1824. 4. jene alten Namen: (parabolisches und hyperbolisches) Konoid, sowie (längliches und geplattetes) Sphäroid mit Recht bei, weil der griechische Name auch für die Fälle leichter dehnbar ist, in welchen solche Körper sich nicht mehr durch Drehung um eine Axe erzeugen lassen. Völlig sprachwidrig aber sind die aus Frankreich mit der Coordinatengeometrie zu uns herübergekommenen Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide; denn diese bedeuten krummlinig begrenzte Ebenen, welche das Ansehen (τὸ εἶδος) von Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen haben, ohne es zu sein. (Auch die in Frankreich gemachte Cykloide ähnelt eher allem andern, als einem Kreise, und würde sachgemäss eine Ellipse bezeichnen.) Doch vor dem, was von dorther kommt, schweigt selbst unser sonst so enges etymologisches Gewissen. Ist ja gar irgend wo *un hyperboloide à une nappe* deutsch durch „ein Hyperboloid mit einer Nappe" wiedergegeben worden! Mit den „iden" wird übrigens auch anderwärts ein leidlicher oder vielmehr unleidlicher Unfug getrieben. Es geht damit, wie mit manchen Heilmitteln, die einst neu aufkamen und dann von manchen Aerzten der Vorzeit Patienten verordnet wurden, mit denen sie nichts mehr anzufangen wussten.

Die durch den Umschwung einer Parabel um eine auf der Rückverlängerung ihrer Axe senkrecht stehende Gerade oder einer Hyperbel um ihre Nebenaxe entstehenden Flächen hat *Archimedes* nicht in Betracht gezogen. Man hätte diese in Uebereinstimmung mit den vorigen Namen parabolische und hyperbolische Cylindroide nennen sollen.

Archimedes legt jetzt durch seine Konoide und Sphäroide schneidende Ebenen, welche entweder der Axe parallel sind,

oder senkrecht auf derselben stehen, oder schief gegen dieselbe liegen und beweist, dass dann die Schnitte beziehungsweise dem erzeugenden Kegelschnitte ähnlich, oder Kreise, oder Ellipsen sind.

Diese Untersuchungen bilden ihm die Grundlage zur Inhaltsbestimmung sowohl der von der krummen Fläche und der Ebene begrenzten körperlichen Abschnitte, als auch bei den Sphäroiden des ganzen Inhalts (*στερεόν*).

Zu dem Zwecke wird an irgend einen Punct der krummen Oberfläche die Berührungsebene (*τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον μὴ τέμνον*) und parallel mit dieser durch den Körper eine Ebene gelegt. Der hierdurch erhaltene Körper, welcher am Sphäroid, wo deren gleichzeitig zwei entstehen, für seinen Zweck zunächst als der nicht grössere von beiden angenommen wird, heisst dann, analog dem früheren, ein Abschnitt des Konoids oder Sphäroids, jener Berührungspunct der Gipfel, die begrenzte Ebene die Grundfläche und die Verbindungsstrecke des Gipfels mit dem Mittelpuncte der Grundfläche die Axe des körperlichen Abschnitts.

Für das parabolische Konoid lautet die Bestimmung: *αἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, — βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ· — κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος· — ἄξονα δὲ τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος.* Ib.

In übereinstimmender Weise lauten die Definitionen für

die Abschnitte des hyperbolischen Konoids, wo noch die asymptotische Kegelfläche mit hinzugezogen wird.

An die Sphäroide werden zwei einander parallele Berührungsebenen gelegt und die beiden Berührungspuncte als mit dem Mittelpuncte des Körpers in einer Geraden liegend erwiesen. Mit jenen parallel schneidet dann eine Ebene das Sphäroid beliebig in zwei Abschnitte.

Steht für alle drei Drehungskörper die schneidende Ebene nicht senkrecht auf der Drehungsaxe, so bestimmt sich durch die Schnittebene und durch den Gipfel des Abschnitts je ein gerader Kegel mit elliptischer Grundfläche (ἀπότμαμα κώνου) während beim Senkrechtstehen der Schnittebene an dessen Stelle ein gewöhnlicher gerader Kegel tritt.

Seiner Kubierung beliebiger Abschnitte der drei Drehungskörper schickt *Archimedes* den Satz voraus, dass sich jedem Abschnitte, dessen Grundfläche auf der Axe senkrecht steht, ein aus lauter gleichhohen Cylindern bestehender Körper einschreiben und ein aus eben so hohen Cylindern bestehender Körper umschreiben lässt und dass bei ohne Ende abnehmenden Theilhöhen der Unterschied beider Körper kleiner werden kann, als jeder noch so kleine gegebene Raum. Diese Theilcylinder gehen in Theilcylinderschichten (τόμοι κυλίνδρων) über, wenn die Grundfläche des Abschnitts nicht senkrecht auf der Drehungsaxe steht.

Mit Hilfe dieses Satzes findet *Archimedes*:

Jeder Abschnitt eines parabolischen Konoids ist anderthalbmal so gross, als ein Kegelabschnitt, welcher mit jenem einerlei Grundfläche und Axe hat.

Abschnitte desselben parabolischen Konoids, welche einander gleiche Axen haben, sind inhaltsgleich; ungleichaxige dagegen verhalten sich ihrem Inhalte nach, wie die Quadrate ihrer Axen.

Jeder Abschnitt eines hyperbolischen Konoids verhält sich zu dem Kegelabschnitte, der mit jenem die Grundfläche und Axe gemeinschaftlich hat, wie die Abschnittsaxe vermehrt um den verdreifachten Ansatz der Konoidaxe zur Abschnittsaxe vermehrt um den verdoppelten Ausatz der Konoidaxe.

Wenn ein Sphäroid von einer durch dessen Mittelpunct gehenden Ebene geschnitten wird, so ist jeder der beiden Abschnitte zweimal so gross als derjenige Kegelabschnitt, welcher mit jenem einerlei Grundfläche und Axe hat.

Der kleinere von zwei ungleichen Ergänzungsabschnitten eines Sphäroids verhält sich zu dem Kegelabschnitte, der mit jenem einerlei Grundfläche und Axe hat, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitel beider Abschnitte vermehrt um die Axe des grössern Abschnitts zur Axe des grössern Abschnitts; der grössere jener Ergänzungsabschnitte aber verhält sich zu seinem Kegelabschnitte, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitel beider Abschnitte vermehrt um die Axe des kleinern Abschnitts zur Axe des kleinern Abschnitts.

So sind uns, ohne dass wir's wollten, mit den Namen die Sachen gekommen und haben wir das Andenken an den *Archimedes*, das grösste mathematische Genie des Alterthums, der sich überall Bahn brach und als ein bauender König den Kärnern viel zu thun gab, den Erfinder der Quadratur der Parabel und Ellipse, der Complanation der Kegel- und Kugelfläche und der Kubatur der Drehungs-Konoide und Sphäroide, bei dieser Veranlassung wieder in uns aufgefrischt.



Wiesbaden.
Gedruckt bei Adolph Stein.

